Horizontaler Transfer „Bäume Pflanzen“

Hansruedi Kaiser Mai 2013

1 Realistische Berechnungssituation

Eine Parzelle Wald soll neu bepflanzt werden. Für die verwendete Baumart ist bekannt, dass die einzelnen Bäume in einem Abstand von mindestens 7 Meter voneinander stehen müssen. Mit welcher geometrischen Anordnung kann man am meisten Bäume auf der Parzelle unterbringen?

Ist dies wirklich die Frage, d.h. muss tatsächlich die grösstmögliche Dichte gefunden werden und muss auch noch bewiesen werden, dass es die grösstmögliche Dichte ist, dann geht diese Berechnungssituation klar über das EFZ Niveau hinaus.

Auf EFZ Niveau kann es im Berufsalltag höchstens darum gehen, für eine vorgegebene Anordnung zu berechnen, wie viele Bäume benötigt werden.

Vermutlich geht es aber sogar nur darum, dass die Lernenden nachvollziehen können, dass die Anordnung mittels gleichseitiger Dreiecke tatsächlich dichter ist, als die naheliegende Anordnung mittels Quadrate.

2 Zielsituation

Wie viele Bäume passen auf die Parzelle, wenn man je drei Bäume in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 7 m pflanzt?

3 Ausgangssituation

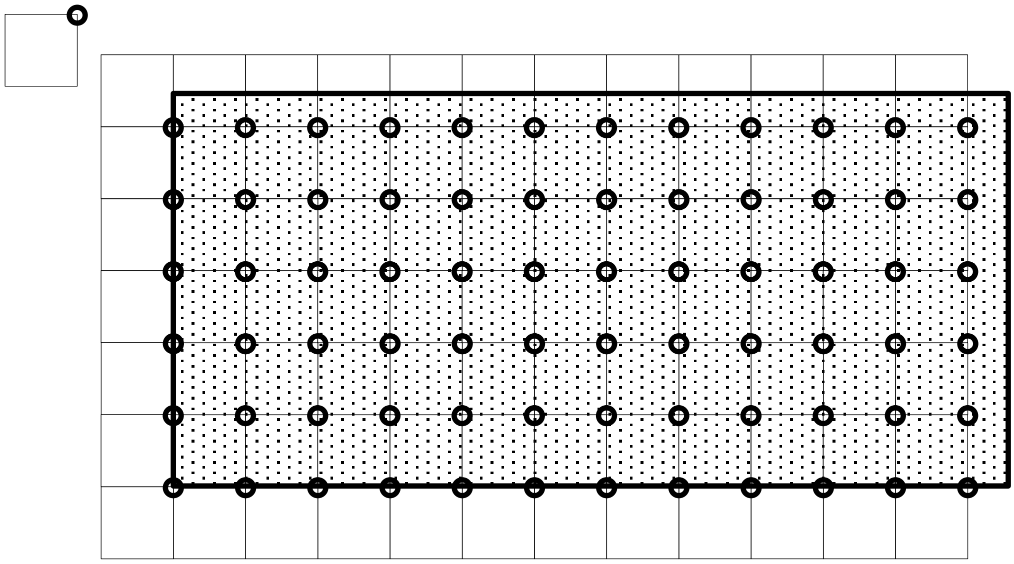
Wie viele Bäume passen auf die Parzelle, wenn man je vier Bäume in die Ecken eines Quadrats mit der Seitenlänge 7 m pflanzt?

4 Boundary Object

Überdeckung der Parzelle mit Hilfe lauter gleich grosser „Kacheln“ (siehe folgende Beispiele).

5 Darstellung der Ausgangssituation

Parzelle: 40m mal 80m (punktierte Fläche)



Mit quadratischen „Kacheln“ zu 7 mal 7 Metern mit einem Baum in einer Ecke kann man die ganze Parzelle füllen.

Man braucht dazu so viele „Kacheln“, wie die Parzelle lang bzw. breit ist. Dazu je noch eine Reihe „links“ und „unten“ um anzufangen. Bei einer Parzelle von 80m auf 40m sind das 12 (11 plus 1) mal 6 (5 plus 1) „Kacheln“ und man kann also 72 Bäume platzieren.

Wenn man es nicht so genau wissen muss, kann man als Annäherung auf einfach schauen, wie viel Mal die Fläche einer „Kachel“ in der Fläche der Parzelle Platz hat:

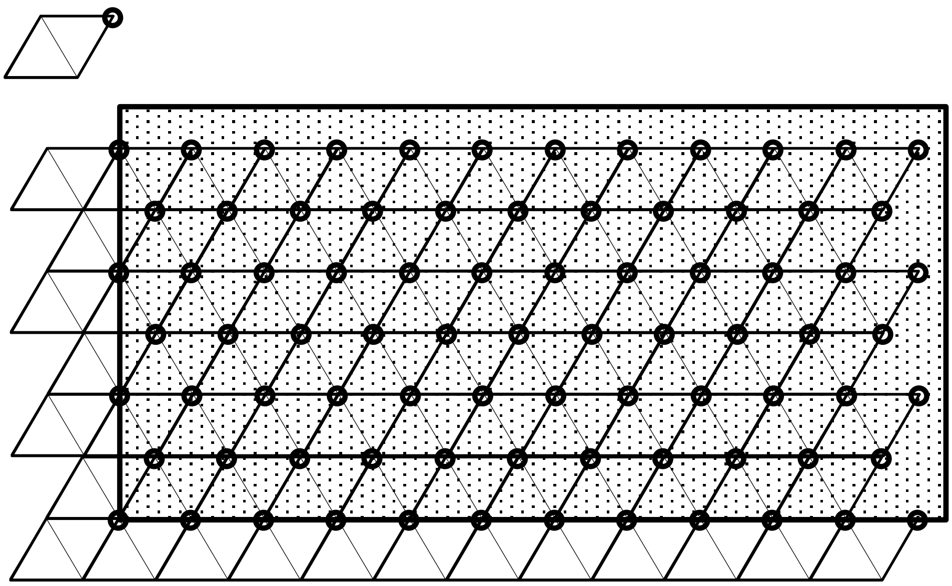
Fläche einer „Kachel“: 7m * 7m = 49m^2

Fläche der Parzelle: 80m * 40m = 3200m^2

Ungefähre Anzahl Kacheln, die Platz haben: 3200m^2/49m^2 = 65

Im konkreten Fall unterschätzt diese Näherung den Bedarf um etwa 9% (7 Bäume von 65 Bäumen).

6 Darstellung der Zielsituation



Mit „Kacheln“ zusammengesetzt aus zwei gleichseitigen Dreiecken und einem Baum in einer Ecke kann man die ganze Parzelle füllen. Die vier Seiten dieser „Kacheln“ sind je 7 Meter lang. Ihre Höhe ist √3/2 * 7 Meter = 6.06 Meter (Pythagoras). Die obere Seite ist gegenüber der unteren um 3.5 Meter verschoben.

Man braucht dazu so viele Reihen, wie von der Höhe her Platz haben. Dazu eine zum Anfangen.

Pro Reihe braucht es so viele „Kacheln“ wie von der Breite her Platz haben. Dazu eine zum Anfangen. Im ungünstigen Fall hat in jeder zweiten Reihe ein Baum weniger Platz. Im günstigen Fall sind es in jeder Reihe gleich viele.

Bei einer Parzelle von 80 mal 40 Meter benötigt man 7 Reihen (6 plus 1).

Für die „ungeraden“ Reihen, bei denen der erste Baum ganz am Rand steht, benötigt man 12 „Kacheln“ (11 plus 1). Das sind 4 mal 12 = 48 „Kacheln“. Der 12. Baum ist 77 Meter vom linken Rand bzw. 3 Meter vom rechten Rand weg.

Die „geraden“ Reihen sind um 3.5 Meter verschoben. Ein zwölfter Baum wäre also 80.5 Meter vom linken Rand weg und hat, wenn man es genau nimmt, nicht mehr Platz. Die ungeraden Reihen enthalten also nur 11 „Kacheln“. Insgesamt sind das 3 mal 11 = 33 „Kacheln“.

Total haben also 48 plus 33 = 81 Bäume Platz.

Wenn man es nicht so genau wissen muss, kann man als Annäherung auf einfach schauen, wie viel Mal die Fläche einer „Kachel“ in der Fläche der Parzelle Platz hat:

Fläche einer „Kachel“: $7m * 6.06m = 42.42m^2$

Fläche der Parzelle: $80m * 40m = 3200m^2$

Ungefähre Anzahl Kacheln, die Platz haben: $3200m^2/42.42m^2 = 75$

Im konkreten Fall unterschätzt diese Näherung den Bedarf um etwa 8% (6 Bäume von 75)

7 Vergleich der beiden Anordnungen

	Vierecke	Dreiecke	Vergleich
Exakte Berechnung	72 Bäume	81 Bäume	81/72 = 1.125
Näherung	etwa 65 Bäume	etwa 75 Bäume	75/65 = 1.15
Flächenvergleich	$49m^2$	$42.42m^2$	$49m^2/42.42m^2 = 1.15$
Höhenvergleich	7m	$\sqrt{3}/2 * 7$ m	$7m/(\sqrt{3}/2*7m)=2/\sqrt{3}=1.15$

Im Vergleich zur Anordnung in Vierecken haben bei der Anordnung in Dreiecken etwa 12% mehr Bäume Platz.

Mit der Näherung kommt man beim Vergleich fast auf dasselbe Ergebnis. Der Unterschied beträgt etwa 2%.

Arbeitet man nur mit der Näherung, kann man sich die Rechnung vereinfachen. Im Fall der Vierecke haben darum weniger Bäume Platz, weil die „Kacheln“ grösser sind. Vergleicht man die Grösse der Kacheln, dann erhält man natürlich wieder 1.15.

Und da die Kacheln sich nur in der Höhe unterschieden, kann man sich auch darauf beschränken, die Höhen zu vergleichen, was wieder 1.15 ergibt.

8 Anmerkungen

8.1 Ausgangssituation

Vermutlich handelt es sich bei der Ausgangssituation in diesem Fall nicht um eine Situation, welche den Lernenden bestens vertraut ist. Es handelt sich also nicht um eine klassische Ausgangssituation für einen horizontalen Transfer. Anzunehmen ist aber, dass sich die meisten Lernenden sehr schnell in die Situation finden werden, so dass sie trotzdem ihre Funktion erfüllen kann.

8.2 Boundary Object

Geht es nur um genau diese Zielsituation, dann könnte man auch mit einem einfacheren Boundary Object arbeiten. In beiden Situationen stehen die Bäume in (horizontalen) Reihen in einem vordefinierten Abstand. Der Unterschied zwischen den Situationen besteht nur darin, dass in der Zielsituation der (vertikale) Abstand zwischen diesen Reihen kleiner ist. Dieselben Überlegungen (genaue Berechnung und Vergleich der Schätzungen) lassen sich auch damit anstellen.

„Kacheln“ als Boundary Object würden es darüber hinaus aber noch ermöglichen, weitere Anordnungen wie etwa Sechsecke etc. durchzudenken.

8.3 Pythagoras

Ob die Herleitung der Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit Hilfe des Satzes des Pythagoras im Unterricht sattfinden soll oder nicht, ist eine Frage der Ziele, die man verfolgt. Für praktische Zwecke genügt sicher, dass die Lernenden sehen, dass die Höhe kleiner ist, als die Seitenlänge. Der genaue Wert kann die Lehrperson liefern.

Als Form der Binnendifferenzierung könnte man Interessierte auffordern, herauszufinden, wie man diesen Wert berechnen könnte.

8.4 Näherung

Dass die naheliegende Überlegung über die Fläche der „Kacheln" nur eine Näherung ist, zeigt erst eine sorgfältige Analyse eines konkreten Beispiels. Dies dürfte sowohl für „starke" wie „schwache" Lernende Konsequenzen haben.

„Strake" Lernenden leuchtet vielleicht der Vergleich der Flächen bzw. der Höhen so direkt ein, dass sie gar nicht wahrnehmen, dass es sich dabei um eine Näherung handelt. Sie müssen dies erst anhand eines konkreten Beispiels erfahren und sich dann so vergewissern, wie gut die Näherung ist.

„Schwache" Lernende ist in Mathematik oft darum „schwach", weil sie konkrete Beispiele brauchen und die notwendigen Abstraktionen erst aus den konkreten Beispielen heraus entwickeln müssen. Ihnen wird vielleicht sofort auffallen, dass es sich beim Vergleich der Flächen nur um eine Näherung handelt, und sie müssen sich anhand konkreter Beispiele davon überzeugen, dass die Näherung brauchbar ist.

Auf jeden Fall gibt die Berechnungssituation Anlass zu einer interessanten Auseinandersetzung mit Näherungen beim Rechnen und mit akzeptablen bzw. inakzeptablen Fehlermargen.

8.5 Binnendifferenzierung

Die ganze Berechnungssituation erlaubt an verschiedensten Stellen eine Binnendifferenzierung vorzunehmen.

Nehmen wir an, dass die Lernenden für ihren beruflichen Alltag wirklich lernen müssen, die genaue Zahl der benötigten Bäume für eine bestimmte Parzelle zu berechnen, dann können sie so anhand der konkreten Überdeckung mit „Kacheln" lernen, diese Anzahl auch für komplexe Parzellenformen und für verschiedenste vorgegebene Anordnungen zu ermitteln. Dazu müsste man dann natürlich weitere Beispiele mit anderen Parzellenformen und allenfalls anderen Anordnungen behandeln.

In Zug der Auseinandersetzung mit den beiden ganz konkreten Fällen (und allenfalls weiteren), können sie erfahren, dass verschiedene Anordnungen verschiedene Dichten erlauben. Sie können sicher auch sehen, dass der Unterschied in den hier behandelten beiden Fällen darin liegt, dass die Reihen „horizontal" verschiedene Abstände haben.

Die rechnerische Auseinandersetzung über den Vergleich der Flächen liegt eine Abstraktionsstufe darüber und ist für die konkrete Berechnung der Anzahl benötigter Bäume nicht notwendig (und eventuell auch nicht präzise genug). Sie könnte fakultativ für Interessierte angeboten werden.

Eine weitere Abstraktionsstufe darüber liegt dann die Frage, mit welcher Anordnung am meisten Bäume gepflanzt werden können. Diese Frage kann man auf zwei Arten angehen:

- Welche Anordnung führt zu den meisten Bäumen pro m^2 (auf einer unbegrenzten Parzelle)? Hier ginge es darum zu beweisen, dass die Dreiecksanordnung tatsächlich die dichteste ist.
- Welche Anordnung führt zu den meisten Bäumen auf einer gegeben Parzelle? Im hier verwendeten Beispiel könnte man etwa, indem man die „ungeraden" Reihen anstatt um 3.5m nur um 3m verschiebt, auch in diesen Reihen 12 Bäume pflanzen. Dadurch müssten die Reihen zwar einen etwas grösseren Abstand haben (6.32m an Stellen von 6.06m), aber dafür ist „nach oben" genügend Platz.

Mit entsprechenden Fragen und Aufträgen könnte man auch echt „starke" Lernende herausfordern.